ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

J. Math. Pures Appl. 88 (2007) 431–453

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

www.elsevier.com/locate/matpur

Stabilisation interne d'ondes électromagnétiques dans un domaine extérieur

Ammar Moulahi

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Monastir, 5019 Monastir, Tunisie

Reçu le 2 octobre 2006

Disponible sur Internet le 26 septembre 2007

Résumé

On étudie le problème de stabilisation interne des équations de Maxwell à l'extérieur d'un obstacle borné. On démontre un résultat concernant le comportement des solutions du système des équations d'ondes amorties et sous l'hypothèse de contrôle géométrique extérieur, on obtient le comportement des solutions du système de Maxwell en grand temps.

Abstract

We study the interior stabilization of Maxwell equations on the exterior of an arbitrary bounded obstacle. In addition, we establish some results concerning the wave equation in the exterior domain and under the "exterior geometric control" condition, we obtain the behavior of the solution for large time.

Mots-clés : Energie locale ; Stabilisation ; Mesures de défaut microlocales ; Résolvante

1. Introduction

Le but de cet article est d'étudier le comportement en temps infini des équations de Maxwell avec la loi d'Ohm. On démontre un résultat de stabilité pour certains systèmes d'équations d'ondes amorties en utilisant des techniques liées à la propagation des mesures de défauts microlocales développées par G. Lebeau [13], P. Gérard [8] et Burq–Lebeau [6].

Ce problème a fait l'objet de plusieurs travaux, on peut citer par exemple : B.V. Kapitanov [9], qui a traité le cas où l'ouvert est le complémentaire d'un domaine étoilé dans $\mathbb{R}^3$ avec conditions au bord de Silver–Müller, et sous certaines conditions des régularités des données initiales, il a établi un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie locale. Dans le cas d'un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, avec conditions aux limites, analogues aux conditions de Silver–Müller, H. Barucq et B. Hanouzet [3] ont fait une étude asymptotique du système.

Le problème de stabilisation frontière par la condition aux limites absorbante de Silver–Müller a été aussi étudié par V. Komornik [11] dans le cadre de géométries particulières par la méthode des multiplicateurs. Récemment, dans

Adresse e-mail : ammar.moulahi@fsm.rnu.tn.

0021-7824/$ – see front matter © 2007 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.matpur.2007.09.006

[15,16], j'ai démontré un résultat de décroissance polynomiale pour le système de Maxwell dans un domaine extérieur de $\mathbb{R}^2$.

Soient $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, à bord régulier $\partial\mathcal{O}$. L'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$, simplement connexe, est occupé par un champ électromagnétique (e, h) avec une permittivité électrique ε et une perméabilité μ qui sont supposées constantes strictement positives. On considère le système de Maxwell suivant :

$$\begin{cases} \partial_t e = \mathbf{rot}\,\mu h - 2\sigma(x)e \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_t h = -\,\mathbf{rot}\,\varepsilon e \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \operatorname{div} h = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \nu \wedge e = 0, \quad h.\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ e(.,0) = e_0, \quad h(.,0) = h_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\nu(x)$ le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$, $e, h : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_+$ régulière et à support compact.

Soit,

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 2\sigma(x)\,\mathrm{Id} & \mathbf{rot}\,\mu\cdot \\ -\mathbf{rot}\,\varepsilon\cdot & 0 \end{pmatrix},$$

l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $\mathcal{L}(\Omega) = (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)^3$ muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_\Omega \varepsilon f_1.\bar{g}_1 + \mu f_2.\bar{g}_2, \quad f = (f_1, f_2),\ g = (g_1, g_2) \in \mathcal{L}(\Omega),$$

de domaine $D(M_\sigma)$, défini comme suit,

$$D(M_\sigma) = \big\{(f, g) \mid (\mathbf{rot}\,\mu g, -\mathbf{rot}\,\varepsilon f) \in \mathcal{L}(\Omega)\ ;\ \nu \wedge f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\big\}.$$

On vérifie que les opérateurs M_σ et M_σ^* (l'adjoint de M_σ) sont monotones. Soit $\mathcal{M} = \{v \in D(M_\sigma),\ M_\sigma^* v = 0\}$, et soit $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}^\perp$ où l'orthogonalité est prise par rapport au produit scalaire de $\mathcal{L}(\Omega)$. Le noyau de M_σ^* est non vide, puisque il contient $(0, \nabla\varphi)$ où φ est régulière. Alors, l'opérateur M_σ engendre un semi-groupe de contraction de classe C^0, unitaire si $\sigma \equiv 0$. Par application du théorème de Hille–Yosida, on a le résultat de régularité suivant :

$$\text{Pour tout } (e_0, f_0) \in \mathcal{M}_1 \cap D(M_\sigma)\ ; \text{il existe une unique,}$$
$$(e, h) \in C^0\big(]0, +\infty[, \mathcal{M}_1 \cap D(M_\sigma)\big) \cap C^1\big(]0, +\infty[, \mathcal{L}(\Omega)\big) \text{ solution de (1).}$$

Soit $R > 0$ tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < R\}$, on pose $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. Pour $u = (e, h)$ solution de (1), on définit les fonctionnelles d'énergie par :

$$\mathcal{E}^0(u)(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon|e|^2 + \mu|h|^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathcal{E}^1(u)(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon|\partial_t e|^2 + \mu|\partial_t h|^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathcal{E}^2(u)(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon\big|\partial_t^2 e\big|^2 + \mu\big|\partial_t^2 h\big|^2\,\mathrm{d}x,$$

et on note par $\mathcal{E}_R^0(u)(t)$, $\mathcal{E}_R^1(u)(t)$, $\mathcal{E}_R^2(u)(t)$ l'énergie locale concentrée dans le domaine Ω_R à l'instant t associée respectivement à $\mathcal{E}^0(u)(t)$, $\mathcal{E}^1(u)(t)$, $\mathcal{E}^2(u)(t)$.

Sous une hypothèse de contrôle géométrique (voir Section 3), on démontre par un argument de propagation des mesures de défaut microlocales le résultat suivant :

Théorème 1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $(e_0, h_0) \in D(M_\sigma^3) \cap \{(e_0, h_0),\ (\mathbf{rot}\,e_0, \mathbf{rot}\,h_0) \in \mathcal{L}(\Omega),\ \operatorname{div} e_0 = 0$ dans Ω et $n \wedge e_0 = 0$, $h_0.\nu = 0$ sur $\partial\Omega\}$, à support dans B_R. Alors, la solution du problème* (1) *de donnée initiale* (e_0, h_0) *satisfait l'estimation,*

$$\mathcal{E}_R^1(P_r u)(t) \leqslant \frac{C}{t\ln(1+t)}\mathcal{E}^1(u)(0), \quad \forall t > 0,$$

où $P_r(u) = (e_1, h)$ *et* e_1 *est la projection de* e *sur l'espace* $\mathbf{rot}\, W^1(\Omega)^3 \oplus \operatorname{grad} W_0^1(\Omega)$, $W^1(\Omega)$ *et* $W_0^1(\Omega)$ *sont les espaces de Beppo Levi définis par* :

$$W^1(\Omega) = \left\{u,\ \frac{u}{(1+r^2)^{1/2}} \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, 2, 3\right\},$$

$W_0^1(\Omega) =$ *fermeture de* $D(\Omega)$ *dans* $W^1(\Omega)$ *et* $r = |x|$, *la distance euclidienne de* x *à l'origine des coordonnées.*

2. Présentation du problème et cadre fonctionnel

On considère un obstacle $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^3$, à bord régulier. On note $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ et $\sigma(x) \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$, à support compact. Soit (e, h) solution du système (1). On obtient que le champ électrique est solution du système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 e + \varepsilon\mu\, \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\, e + 2\sigma(x)\partial_t e = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ e \wedge \nu = 0, \quad \mathbf{rot}\, e.\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ e(., 0) = e_0, \quad \partial_t e(., 0) = \mathbf{rot}\, \mu h_0 - \sigma(x) e_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{$(1)_e$}$$

Le champ magnétique est solution du système :

$$\begin{cases} \partial_t^2 h + \varepsilon\, \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\, \mu h + 2\sigma(x) e) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \operatorname{div} h = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ h.\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ h(., 0) = h_0, \quad \partial_t h(., 0) = \mathbf{rot}\, \varepsilon e_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{$(1)_h$}$$

Soit e solution de $(1)_e$ dont les conditions initiales vérifie $\operatorname{div} h_0 = 0$ dans Ω, $e_0 \wedge \nu = 0$ et $h_0.\nu = 0$ sur $\partial\Omega$. On considère h solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h = -\mathbf{rot}\, \varepsilon e, \\ h(., 0) = h_0. \end{cases} \tag{2}$$

On obtient que e et h sont respectivement solution de $(1)_e$ et $(1)_h$. Donc, on peut conclure que (e, h) est une solution de (1). En effet, si h est solution de (2), on a $\mathbf{rot}\, \partial_t h = -\varepsilon\mu\, \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\, e = \partial_t^2 e + 2\sigma(x)\partial_t e$, ceci implique que $(\mathbf{rot}\, \mu h - \partial_t e - 2\sigma(x) e) = cste$ qui ne dépend que de x et à l'aide des conditions initiales, on a que (e, h) vérifient $(1)_h$ et (e, h) solution de (1). Donc, l'étude du comportement asymptotique en temps grand de l'énergie locale de (1) peut être déduit de celle du problème $(1)_e$. Dans la suite, pour des raisons de simplicité, on suppose que $\varepsilon = \mu = 1$.

2.1. Décomposition orthogonale et sous-espace invariant

La stabilisation interne ne préserve pas la condition de divergence nulle du champ électrique. Il est donc naturel de décomposer le champ électrique en deux parties, une partie à divergence nulle et une partie à rotationnel nul. Donc, on va montrer que le champ électromagnétique se décompose de la manière suivante :

Lemme 2.

$$\forall (e_0, h_0) \in \mathcal{M}_1 \cap D(M_\sigma),$$
$$\exists!(p, e_*, A) \in C^1\big([0, +\infty[, W_0^1(\Omega) \times \mathcal{H}_2(\Omega)\big) \times C^2\big([0, +\infty[, W_0^1(\Omega)^3\big)$$

tel que

$$\begin{cases} (e, h) \textit{ solution de } (1), \\ e = -\nabla p - \partial_t A + e_*, \\ h = \mathbf{rot}\, A, \\ \operatorname{div} A = 0 \quad \textit{dans } \Omega,\ A \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0 \textit{ et } \int_{\partial\Omega} A.\nu \, \mathrm{d}\gamma(x) = 0. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\|e\|_{L^2(\Omega)^3}^2 = \|\partial_t A\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|e_*\|^2.$$

Où,

$$\mathcal{H}_2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} f = 0,\ f \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0,\ \mathbf{rot}\, f = 0\}$$
$$= \{f = \nabla\varphi \mid \varphi \in W^1(\Omega),\ \Delta\varphi = 0,\ \varphi|_{\partial\Omega} = cste\}.$$

On désigne par :

$$\mathcal{H}_1(\Omega) = \{g \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} g = 0,\ g.\nu_{\partial\Omega} = 0,\ \mathbf{rot}\, g = 0\}.$$

Démonstration. On rappelle les décompositions orthogonales (voir [7, p. 342]),

$$\big(L^2(\Omega)\big)^3 = \operatorname{grad} W_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathbf{rot}\, W^1(\Omega),$$
$$\big(L^2(\Omega)\big)^3 = \operatorname{grad} W^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathbf{rot}\big(W_0^1(\Omega)\big)^3.$$

Dans notre cas Ω est simplement connexe, ce qui implique que $\mathcal{H}_1(\Omega) = \{0\}$ et $\dim \mathcal{H}_2(\Omega) = 1$ (pour plus de détails on peut voir R. Dautray et J.L. Lions [7, tome 2, p. 267]).

Comme $\operatorname{div} h = 0$ et $h.\nu = 0$, alors le champ magnétique h se décompose de manière unique sous la forme :

$$h = h_* + \mathbf{rot}\, A, \quad A \in W_0^1(\Omega)^3,\ h_* \in \mathcal{H}_1(\Omega) = \{0\}.$$

En revenant au système (1), on a $\operatorname{rot}(\partial_t A + e) = 0$. On choisit $p \in W_0^1(\Omega)$ solution du problème elliptique :

$$\begin{cases} -\Delta p = \operatorname{div} e & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\partial_t A + \nabla p + e) = 0, \\ \operatorname{div}(\partial_t A + \nabla p + e) = 0, \\ (\partial_t A + \nabla p + e) \wedge \nu = 0, \end{cases}$$

ce qui aboutit à la décomposition du champ électromagnétique désirée, avec $e_* = \partial_t A + \nabla p + e$.

Par la deuxième définition de $\mathcal{H}_2(\Omega)$, A est orthogonal à e_*,

$$\int_\Omega A.e_* = \int_\Omega A.\nabla\varphi = -\int_{\partial\Omega} \varphi \operatorname{div} A + \int_{\partial\Omega} \varphi A.\nu = 0,$$

et il en découle la relation suivante :

$$\|e\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t A\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_*\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad \square$$

Remarque 3. L'étude du champ électrique $e \in C^1([0, +\infty[, L^2(\Omega)^3)$ se fera avec la décomposition orthogonale : $e = -\nabla p + u$ où $p \in C^1([0, +\infty[, W_0^1(\Omega))$ et $u \in C^1([0, +\infty[, L^2(\Omega)^3)$ à divergence nulle. Ainsi

$$\begin{cases} -\Delta p = \operatorname{div} e, \\ \mathbf{rot}\, e = \mathbf{rot}\, u, \\ e \wedge \nu|_{\partial\Omega} = u \wedge \nu|_{\partial\Omega}, \end{cases}$$

car $\nabla p \wedge \nu$ est une dérivée tangentielle de p à $\partial\Omega$ or $p|_{\partial\Omega} = 0$.

2.2. Sous-espaces invariants

On pose :

$$\omega_+ = \{\sigma > 0\}, \qquad \omega_- = \Omega \setminus \operatorname{supp}\sigma,$$

$\partial\omega_-$ a un nombre fini de composantes connexes $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_r$. On rappelle que l'image du rotationnel, $\mathbf{rot}(W^1(\omega_-))^3$, est fermé dans $(L^2(\omega_-))^3$,

$$\mathbf{rot}\big(W^1(\omega_-)\big)^3 = \left\{u \in L^2(\omega_-)^3 \;\middle|\; \operatorname{div} u = 0 \text{ et } \int_{\Gamma_i} u.\nu = 0,\ i = 0, \ldots, r\right\},$$

son orthogonal dans $L^2(\omega_-)^3$ est :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\, W^1(\omega_-)^\perp &= \{v \in L^2(\omega_-)^3 \mid \mathbf{rot}\, v = 0 \text{ et } v \wedge \nu|_{\partial\omega_-} = 0\} \\ &= \{v = \nabla\varphi \mid \varphi \in W^1(\omega_-),\ \varphi|_{\Gamma_i} = cste,\ i = 0, \dots, r\}.\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\operatorname{supp}\sigma$ est compact, $\omega_- \neq \emptyset$. On pose :

$$\mathcal{M}_\omega = \left(\mathbf{rot}\, W^1(\omega_-) \cap L^2(\Omega)^3\right) \times L^2(\Omega)^3,$$
$$\mathcal{V} = \{f \in L^2(\Omega)\} \times \{g \in L^2(\Omega);\ \operatorname{div} g = 0;\ g.\nu = 0\}.$$

L'espace $\mathcal{M}_\omega \cap D(M_\sigma)$ est alors invariant pour le problème (1). Il suffit de multiplier l'équation $\varepsilon\partial_t e - \mathbf{rot}\, h + \sigma e = 0$ par $v \in (\mathbf{rot}\, W^1(\omega_-)^\perp)$. Ainsi on a le résultat de régularité :

$$\forall (e_0, h_0) \in \mathcal{M}_\omega \cap D(M_\sigma),$$
$$\exists!(e, h) \in C^0\left(]0, +\infty[; D(M_\sigma) \cap \mathcal{M}_\omega\right) \cap C^1\left(]0, +\infty[; \mathcal{V} \cap \mathcal{M}_\omega\right),$$
$$\text{solution du problème (1).}$$

Les équations du problème (1) deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_t \nabla p - \mathbf{rot}\, h + 2\sigma e = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_t h + \mathbf{rot}\, u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} h = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u \wedge \nu = 0, \quad h.\nu = 0,\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \tag{3}$$

et

$$e = u - \nabla p.$$

Ainsi, la partie, rotationnelle du champ électrique e est solution du système hyperbolique,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\, u + 2\sigma\partial_t u - 2\sigma\partial_t\nabla p - \partial_t^2\nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u \wedge \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \end{cases}$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + 2\sigma\partial_t u - 2\sigma\partial_t\nabla p - \partial_t^2\nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u \wedge \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty). \end{cases} \tag{4}$$

Si on suppose que $\operatorname{supp}\sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$, d'après ce qui précède on peut écrire que la condition au bord est $\operatorname{div} u = \operatorname{div} e = 0$.

Dans la suite, on va étudier l'existence et le comportement en temps infini de l'énergie locale du problème sans second membre :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + 2\sigma\partial_t u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u \wedge \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty). \end{cases} \tag{5}$$

Puis, en utilisant la formule de Duhamel et à l'aide des techniques classiques on pourra démontrer le Théorème 1.

3. Etude du problème sans second membre

On considère le système d'équations des ondes amorties :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + 2\sigma\partial_t u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u \wedge \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

$(u_0, u_1) \in H = \widetilde{H}^1 \times \widetilde{L}^2(\Omega)$, où H est le complété hilbertien de $(\widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3)^2$ pour la norme,

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega |\mathbf{rot}\, u_0|^2 + |\mathrm{div}\, u_0|^2 + |u_1|^2,$$

où

$$\widetilde{C}_0^{+\infty}(\overline{\Omega})^3 = \{\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^3,\ \varphi \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0\}\big|_{\{f=\nabla\varphi|\varphi\in C_0^{+\infty}(\Omega),\ \Delta\varphi=0,\ \varphi|_{\partial\Omega}=cste\}}.$$

Remarque 4. La norme sur $\widetilde{L}^2(\Omega)$ est donnée par :

$$\|u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega)} = \inf_{\varphi\in\mathcal{H}_2} \|u+\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

et on note

$$\|u\|_{\widetilde{L}^2(\Omega_R)} = \inf_{\varphi\in\mathcal{H}_2} \|u+\varphi\|_{L^2(\Omega_R)}.$$

On note par $E_R(u)(t)$ l'énergie locale de u à l'instant $t > 0$, définie par :

$$E_R(u)(t) = \int_{\Omega_R} |\mathrm{div}\, u|^2 + |\mathbf{rot}\, u|^2 + |\partial_t u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Afin d'énoncer le résultat principal de cette section, on donne la définition du contrôle géométrique extérieur introduite dans [1,2,13].

Définition 5. Soit $R > 0$ tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset B_R$, $T_R > 0$ et $\omega = \{\sigma > 0\}$. On dit que (ω, T_R) vérifie le contrôle géométrique extérieur au dessus de B_R (C.G.E.), si tout rayon bicaractéristique généralisé γ issu, à l'instant $t = 0$, d'un point de $T_b^*(\mathbb{R}_+ \times \Omega_R)$ vérifie l'une des conditions suivantes :

- γ quitte $\mathbb{R}_+ \times B_R$ avant l'instant T_R, ou
- γ rencontre la région $\mathbb{R}_+ \times \omega$ entre les instants 0 et T_R.

On peut, à présent, énoncer le théorème principal :

Théorème 6. *Il existe $C, \beta > 0$ tel que pour tout $(u_0, u_1) \in H$, à support dans B_R. La solution du problème* (5) *de donnée initiale (u_0, u_1) vérifie l'inégalité* :

$$E_R(u)(t) \leqslant C\mathrm{e}^{-\beta t} E(u)(0).$$

Soit $f = (u_0, u_1) \in H$, on montre que le problème (5) possède une solution globale en temps,

$$u(x,t) \in C\big([0, +\infty[, \widetilde{H}^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0, +\infty[, \widetilde{L}^2(\Omega)^3\big), \quad \forall t > 0.$$

Si on pose $v = \partial_t u$ (u solution de (5)) alors on a formellement :

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A_\sigma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On obtient donc l'équation :

$$\partial_t U_\sigma(t) f = A_\sigma U_\sigma f, \tag{7}$$

où $U_\sigma(t) f = (u, \partial_t u)$.

Pour donner un sens précis à ce qui précède, il suffit de bien définir A_σ, pour qu'il engendre sur H un semi-groupe, tel que les deux problèmes (5) et (7) soient équivalents.

Pour cela, on considère A_σ l'opérateur non borné de domaine :

$$D(A_\sigma) = \big\{ f = (u_0, u_1) \in H \mid (u_1, \Delta u_0) \in H \text{ et } \mathrm{div}\, u_0 = 0,\ u_0 \wedge \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \big\},$$

défini par $A_\sigma f = (u_1, \Delta u_0 - 2\sigma u_1)$.

A_σ vérifie alors la propriété suivante :

Proposition 7. *A_σ est maximal dissipatif.*

Démonstration. Soit $f \in D(A_\sigma)$, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(A_\sigma f, f) &= \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \Delta u_0 - 2\sigma u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Re}\int_\Omega \operatorname{div} u_1 . \operatorname{div} \bar{u}_0 + \mathbf{rot}\, u_1 . \mathbf{rot}\, \bar{u}_0 + \big(\Delta u_0 - 2\sigma(x) u_1\big).\bar{u}_1 \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega 2\sigma(x)|u_1|^2 \leqslant 0, \quad \forall f \in D(A_\sigma).
\end{aligned}$$

C'est à dire A_σ est dissipatif. □

$\operatorname{Im}(A_\sigma - I)$ est fermé dans H ; en effet : soit (f_n) une suite de $\operatorname{Im}(A_\sigma - I)$ telle que $f_n \to f$ dans H.
$f_n \in \operatorname{Im}(A_\sigma - I)$ alors $\exists g_n \in D(A_\sigma)$ tel que $f_n = A_\sigma g_n - g_n$. On a :

$$\begin{aligned}
\big\|(A_\sigma - I)(g_n - g_m)\big\|^2 &= \big\|\big(A_\sigma(g_n - g_m)\big)\big\|^2 + \|g_n - g_m\|^2 - 2\operatorname{Re}\big(A_\sigma(g_n - g_m), g_n - g_m\big) \\
&\geqslant \big\|\big(A_\sigma(g_n - g_m)\big)\big\|^2 + \|g_n - g_m\|^2,
\end{aligned}$$

donc (g_n) est une suite de Cauchy dans $D(A_\sigma)$. Elle converge alors vers un élément g de $D(A_\sigma)$, c'est à dire $A_\sigma g_n - g_n \to A_\sigma g - g$ et donc on obtient $f \in \operatorname{Im}(A_\sigma - I)$.

De plus, $\operatorname{Im}(A_\sigma - I)$ est dense dans H, en effet : puisque $\widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3 \times \widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3$ est dense dans H alors, il suffit de prouver que

$$\widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3 \times \widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3 \subset \operatorname{Im}(A_\sigma - I).$$

Soit donc $h \in \widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3 \times \widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3$, montrons qu'il existe $f \in D(A_\sigma)$ tel que

$$(A_\sigma - I)f = h. \tag{8}$$

Posons $h = (h_0, h_1)$ et $f = (f_0, f_1)$, l'Éq. (8) est équivalente à :

$$\begin{cases}
\Delta f_0 - (2\sigma + 1) f_0 = h_1 + h_0 = \widetilde{h} \quad \text{dans } \Omega, \\
\operatorname{div} f_0 = 0, \quad f_0 \wedge \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\
f_1 = (2\sigma + 1) f_0 + h_0 \quad \text{dans } \Omega.
\end{cases} \tag{9}$$

Pour résoudre le système (9) on va chercher tout d'abord une solution faible et ensuite on démontrera qu'elle est forte.

Soit $v \in \widetilde{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, v est dite solution faible de (9) si elle vérifie l'égalité suivante :

$$\int_\Omega \operatorname{div} v . \operatorname{div} \overline{\Psi} + \mathbf{rot}\, v . \mathbf{rot}\, \overline{\Psi} + (2\sigma + 1) v . \overline{\Psi} \, \mathrm{d}x = -(\widetilde{h}, \Psi)_{L^2}, \quad \forall \Psi \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega)^3. \tag{10}$$

On note $\widetilde{H}(\Omega)$ le complété de $\widetilde{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3$ pour la norme :

$$\|\Phi\|^2 = \int_\Omega |\operatorname{div} \Phi|^2 + |\mathbf{rot}\, \Phi|^2 + (2\sigma + 1)|\Phi|^2.$$

$\widetilde{H}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_\Omega \operatorname{div} \Phi . \operatorname{div} \overline{\Psi} + \mathbf{rot}\, \Phi . \mathbf{rot}\, \overline{\Psi} + (2\sigma + 1) \Phi \overline{\Psi} \, \mathrm{d}x.$$

On note par $\mathcal{L}$ la forme linéaire définie par :

$$\forall \Psi \in \widetilde{H}(\Omega) \quad \mathcal{L}(\Psi) = -(\widetilde{h}, \Psi)_{L^2},$$

avec $(u,v)_{L^2} := \langle u_1, v_1\rangle_{L^2} = \int_\Omega u_1.v_1\,\mathrm{d}x$ où $u_1 = P_r u$, $v_1 = P_r v$ et P_r la projection donnée dans le Théorème 1. On a $|\mathcal{L}(\Psi)| \leqslant c\|\Psi\|$, donc $\mathcal{L}$ est une forme linéaire continue sur $\widetilde{H}(\Omega)$. Il existe alors un unique $g \in \widetilde{H}(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{L}(\Psi) = (g, \Psi) \quad \forall\Psi \in \widetilde{H}(\Omega),$$

c'est à dire que g est solution de,

$$-\Delta g + (2\sigma + 1)g = -\widetilde{h}, \quad \widetilde{h} = h_1 + h_0, \tag{11}$$

dans $D'(\Omega)^3$ (le dual de $D(\Omega)^3$) ceci implique que $g \in \widetilde{H}^2(\Omega)$ et $\operatorname{div} g \in L^2(\partial\Omega)$. En intégrant par parties dans le premier membre de (10) et en tenant compte de l'inégalité (11) on déduit que

$$\operatorname{div} g|_{\partial\Omega} = 0, \quad g \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0.$$

On conclut alors que $f = (g, g + h_1) \in D(A_\sigma)$ et quelle constitue une solution forte du problème (10).

A_σ est maximale dissipatif, alors d'après le théorème de Hille–Yosida, il engendre un semi-groupe $(U_\sigma)_{t\geqslant 0}$. Pour $\sigma = 0$, A_0 est auto-adjoint et donc il engendre sur H un groupe unitaire $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Soit $\Theta_\sigma(t)$ le propagateur des ondes :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + 2\sigma\partial_t)\Theta_\sigma(t)f = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \operatorname{div}(\Theta_\sigma(t)f) = 0, \quad \Theta_\sigma(t)f \wedge \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \Theta_\sigma(0)f = 0, \\ \partial_t\Theta_\sigma(0)f = f \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega)^3, \end{cases} \tag{12}$$

qu'on étend comme opérateur de $\widetilde{L}^2(\Omega)$ dans $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Soit l'opérateur $\mathcal{N}_\sigma(\lambda)$ défini par la relation suivante :

$$\mathcal{N}_\sigma(\lambda)f = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\Theta_\sigma(t)f\,\mathrm{d}t, \quad \text{pour } \{\operatorname{Im}\lambda < 0\}.$$

Soit $\chi \in C_0^\infty$, $\chi = 1$ sur B_R. La résolvante sortante tronquée,

$$\mathcal{N}_{\sigma,\chi}(\lambda) = \chi\mathcal{N}_\sigma(\lambda)\chi,$$

considérée comme opérateur de $\widetilde{L}^2(\Omega)$ dans $\widetilde{H}^1(\Omega)$, holomorphe dans $\{\operatorname{Im}\lambda < 0\}$, s'étend en un opérateur méromorphe dans $\mathbb{C}$. D'abord, on va localiser les pôles de ce prolongement, qu'on appelle pôles de diffusion. Ces pôles sont aussi les points pour les quels il existe une solution qui vérifie la condition de radiation sortante (CRS)[1] non triviale de l'équation :

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2 - 2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\lambda)u|_\Omega = 0, \\ \operatorname{div} u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Pour cela, on note $D(0) = \inf\{\operatorname{Im}\lambda, \lambda \text{ pôle de } R_\sigma(\lambda)\}$, et

$$\widetilde{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{sur } B_R, \\ +\infty & \text{sur } B_R^c. \end{cases}$$

Pour tout $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in T^*(\Omega)$; avec $|\xi_0| = 1$ (et ξ_0 appartenant au demi-espace fermé défini par $\overline{\Omega}$ si $x_0 \in \partial\Omega$), il existe une unique géodésique généralisée, $s \mapsto x(s, \rho_0)$ de $\overline{\Omega}$ issue de ρ_0, vérifiant $x(0, \rho_0) = x_0$, $\lim_{s\to 0^+} \frac{x(s,x_0)}{s} = \xi_0$ parcouru à la vitesse 1. Pour $t > 0$, On pose :

$$C(t) = \inf_{\rho_0} \frac{1}{t}\int_0^t \widetilde{\sigma}\big(x(s, \rho_0)\big)\,\mathrm{d}s,$$

[1] Une solution u dite vérifie la condition de radiation sortante si elle satisfait :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|=R} |\nu \wedge \mathbf{rot}\, u + \mathrm{i}\lambda u|^2\,\mathrm{d}\gamma(x) = 0.$$

c'est une fonction de t, continue, positive, qui vérifie

$$tC(t) + sC(s) \leqslant (t+s)C(s+t).$$

On note $C(\infty) = \lim_{t\to\infty} C(t)$ qui existe car $t \to tC(t)$ est sous-additive [13], et elle peut être infinie. La limite $C(\infty)$ ne fait intervenir que la moyenne de $\sigma(x)$ sur les géodésiques captées et sous l'hypothèse du (C.G.E.), on a $C(\infty) > 0$. On a le théorème de localisation suivant :

Théorème 8. *Pour tout $\delta < C(\infty)$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que la résolvante sortante tronquée $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}(\lambda)$ se prolonge d'une manière holomorphe dans la région* :

$$F_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta,\ |\operatorname{Re}\lambda| \geqslant \lambda_0\}. \tag{13}$$

Plus précisément, il existe $c > 0$ tel que pour toute $f \in (\widetilde{L}^2(\Omega))^3$, $\operatorname{supp} f \subset B_R$ et pour toute $\lambda \in F_{\lambda_0}$, on a :

$$\|\mathbf{rot}\mathcal{N}_\sigma(\lambda)f\|^2_{L^2_R} + \|\operatorname{div}\mathcal{N}_\sigma(\lambda)f\|^2_{L^2_R} + \|\lambda\mathcal{N}_\sigma(\lambda)f\|^2_{\widetilde{L}^2_R} \leqslant c\|f\|^2_{\widetilde{L}^2_R}. \tag{14}$$

Théorème 9. *Sous l'hypothèse du (C.G.E.) au dessous de B_R, pour tout $\delta < \alpha = 2\min(D(0), C(\infty))$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $g \in \widetilde{H}^1$, à support dans B_R, on a l'estimation de l'énergie suivante* :

$$E_R(\Theta_\sigma(t)f) \leqslant c\mathrm{e}^{-\delta t} E(\Theta_\sigma(0)f), \quad \forall t > 0,$$

où Θ_σ est la première composante de la solution de (5) *pour la donnée initiale f.*

3.0.1. Localisation des pôles de la résolvante

D'abord, on démontre que la résolvante sortante $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}$ considérée comme opérateur de $\widetilde{L}^2(\Omega)^3$ dans $\widetilde{H}(\Omega)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$. On rappelle que toute fonction $f \in \widetilde{L}^2(\Omega)^3$ à support dans B_R, $\mathcal{N}_\sigma(\lambda)f$ est l'unique solution qui vérifie la condition de radiation sortante (CRS) du problème non homogène suivant,

$$\begin{cases} (-\Delta - \lambda^2 + \mathrm{i}2\lambda\sigma(x))u = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u \wedge \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

que l'on peut voir comme perturbation du problème dans l'espace libre

$$(-\Delta - \lambda^2)\omega = g \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,\ g \in L^2(\Omega_R)^3 \tag{16}$$

où $\omega = \mathcal{N}_0(\lambda)g$ avec $\mathcal{N}_0(\lambda)$ la résolvante sortante libre donnée par :

$$\mathcal{N}_0(\lambda)g = \int \gamma(|x-y|, \lambda)g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{17}$$

avec $\gamma(r,\lambda) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda r}P(r,\lambda)$, P est un polynôme. On pose :

$$u = \omega - \beta h,$$

où h est solution du système,

$$\begin{cases} \Delta h + \xi^2 h - 2\mathrm{i}\xi\sigma(x)h = 0 & \text{dans } \Omega_R, \\ h \wedge \nu|_{\partial\Omega} = \omega \wedge \nu|_{\partial\Omega}, & \operatorname{div} h|_{\partial\Omega} = \operatorname{div}\omega|_{\partial\Omega}, \\ h = 0 \quad \text{sur } \{|x| = R\}, \end{cases}$$

et $\beta \in C_0^\infty$ valant 1 près de $\partial\Omega$ et sur un voisinage de support de $\sigma(x)$ et à support dans B_R, ξ étant choisi ultérieurement et fixé suivant la discussion. Ainsi ω est complètement déterminé par g et h. Le problème est donc de déterminer la fonction g sur laquelle u vérifie (15), ainsi

$$f = (-\Delta - \lambda^2 + \mathrm{i}2\lambda\sigma(x))u = (I - \mathcal{F}_\lambda)g,$$

où $\mathcal{F}_\lambda g = -2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\omega - (\Delta\beta)h - 2\nabla\beta\nabla h - [\lambda^2 - \xi^2 + 2\mathrm{i}\sigma(x)(\xi - \lambda)]\beta h$.

Lemme 10. *On a* :

(1) $\mathcal{F}_\lambda$ *est un opérateur compact sur* $\widetilde{L}^2(\Omega)^3$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
(2) $\mathcal{F}_\lambda$ *est une fonction holomorphe en* λ *dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration de (1). Soit $\widetilde{H}^k(\Omega_R)$, $k \geqslant 1$, l'espace des fonctions définies sur Ω_R, ayant comme norme,

$$\|h\|_k' = \left\{ \|h\|^2_{\widetilde{L}^2_R} + \sum_{|l| \leqslant k-1} \int_{\Omega_R} |\partial^l \,\mathbf{rot}\, h|^2 + |\partial^l \operatorname{div} h|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

A partir de (17) et de la théorie des intégrales oscillantes on peut voir que

$$\|\beta\omega\|_2' \leqslant C_\lambda \|g\|_0', \tag{18}$$

où C_λ est uniformément borné sur tout compact de $\mathbb{C}$. Maintenant, $v = h - \beta\omega$ satisfait l'équation :

$$\begin{aligned}
&\Delta v + \xi^2 - 2\mathrm{i}\xi\sigma(x)v = -\Delta(\beta\omega) - \xi^2\beta\omega + 2\mathrm{i}\xi\sigma\beta\omega \quad \text{dans } \Omega_R, \\
&\operatorname{div} v = 0, \quad \nu \wedge v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\
&v = 0 \quad \text{sur } \{x;\ |x| = R\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

On choisit ξ tel que $\Delta + \xi^2 - 2\mathrm{i}\sigma(x)\xi$ est inversible. Donc, par un argument d'éllipticité on a :

$$\|v\|_2' \leqslant \widetilde{C}_\lambda \|\beta\omega\|_2'. \tag{20}$$

On obtient, d'après (18)

$$\|h\|_2' \leqslant \widetilde{C}_\lambda C_\lambda \|\theta\|_0'.$$

On a que $\mathcal{F}_\lambda$ ne contient que des dérivations de premier ordre de h,

$$\|\mathcal{F}_\lambda g\|_1' \leqslant \|h\|_2' \leqslant C_\lambda' \|\theta\|_0', \tag{21}$$

et d'après le théorème de compacité de Rellich, on déduit que $\mathcal{F}_\lambda$ est un opérateur compact sur $\widetilde{L}^2(\Omega_R)$.

Démonstration de (2). On a $\mathcal{N}_0(\lambda)$ considérée comme opérateur de $\widetilde{L}^2(\Omega_R)$ dans l'espace $\widetilde{H}^2(\Omega_R)$ il est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De la relation $h = v + \beta\omega$ et de (20), on peut voir que $\mathcal{F}_\lambda$ est holomorphe. Enfin, on déduit que l'opérateur $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}(\lambda)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. □

3.0.2. Etude de basses fréquences

On commence par démontrer le lemme suivant, inspiré de [4] :

Lemme 11. *Si* $g \in \widetilde{L}^2(\Omega)$ *à support dans* B_R, *alors pour tout* $\lambda \neq 0$ *et* $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, $\mathcal{N}_\sigma(\lambda)g$ *est l'unique solution vérifiant la condition de radiation sortante du problème* :

$$\begin{cases}
(-\Delta - \lambda^2 + 2\mathrm{i}\sigma\lambda)u = g \quad \textit{dans } \Omega, \\
\operatorname{div} u = 0, \quad u \wedge \nu = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega, \\
\textit{u satisfait la condition de radiation sortante}.
\end{cases} \tag{22}$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe deux solutions, alors la différence v satisfait l'équation homogène suivante :

$$\begin{cases}
(-\Delta - \lambda^2 + 2\mathrm{i}\sigma\lambda)v = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\
\operatorname{div} v = 0, \quad v \wedge \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\
v \text{ satisfait la condition de radiation sortante.}
\end{cases}$$

On a $\operatorname{supp}\sigma \subset B_R$. En utilisant l'expression $-\Delta = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot} - \operatorname{grad}\operatorname{div}$, on intègre sur Ω_R, on a pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$

$$\mathrm{i}\lambda(\overline{v}, \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\, v - \operatorname{grad}\operatorname{div} v) + \mathrm{i}\overline{\lambda}\lambda^2(\overline{v}, v) + |\lambda|^2\big(\overline{v}, \sigma(x)v\big) = 0,$$

ceci implique :

$$\mathrm{i}\bar{\lambda}\lambda^2\int\limits_{\Omega_R}|v|^2-\mathrm{i}\bar{\lambda}\int\limits_{\Omega_R}|\mathbf{rot}\,v|^2+|\mathrm{div}\,v|^2\,\mathrm{d}x+|\lambda|^2\int\limits_{\Omega_R}\sigma(x)|v|^2$$
$$+\,\mathrm{i}\bar{\lambda}\int\limits_{\partial\Omega_R}\bar{v}.\,\mathbf{rot}\,v\wedge\nu+\mathrm{div}\,v v.\nu\,\mathrm{d}\gamma(x)=0. \tag{23}$$

En écrivant la partie réelle de (23) on obtient :

$$-2\,\mathrm{Im}\,\lambda\int\limits_{\partial\Omega_R}v.\,\mathbf{rot}\,\bar{v}\wedge\nu\,\mathrm{d}\gamma(x)=-2|\lambda|^2\,\mathrm{Im}\,\lambda\int\limits_{\Omega_R}|v|^2\,\mathrm{d}x-2\,\mathrm{Im}\,\lambda\int\limits_{\Omega_R}|\mathbf{rot}\,v|^2$$
$$+\,|\mathrm{div}\,v|^2\,\mathrm{d}x+2|\lambda|^2\int\limits_{\Omega_R}\sigma(x)|v|^2\,\mathrm{d}x.$$

Puisque

$$|\nu\wedge\mathbf{rot}\,v+\mathrm{i}\lambda v|^2=|\nu\wedge\mathbf{rot}\,v|^2+|\lambda|^2|v|^2-2\,\mathrm{Im}\,\lambda(v,\mathbf{rot}\,\bar{v}\wedge\nu),$$

et en utilisant la condition de radiation sortante (i.e. $\lim_{R\to+\infty}\int_{|x|=R}|\nu\wedge\mathbf{rot}\,v+\mathrm{i}\lambda v|^2\,\mathrm{d}\gamma(x)=0$), on aura :

$$\lim_{R\to+\infty}\Bigg\{-2|\lambda|^2\,\mathrm{Im}\,\lambda\int\limits_{\Omega_R}|v|^2\,\mathrm{d}x-2\,\mathrm{Im}\,\lambda\int\limits_{\Omega_R}|\mathbf{rot}\,v|^2+|\mathrm{div}\,v|^2\,\mathrm{d}x$$
$$+\,2|\lambda|^2\int\limits_{\Omega_R}\sigma(x)|v|^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{|x|=R}|\nu\wedge\mathbf{rot}\,v|^2+|\lambda|^2|v|^2\Bigg\}=0. \tag{24}$$

Par conséquent, pour $\lambda\neq 0$ et $\mathrm{Im}\,\lambda<0$, on obtient que $v=0$ dans Ω.

Supposons que $\mathrm{Im}\,\lambda=0$ et $\lambda\neq 0$, l'Éq. (23) entraine :

$$\mathrm{Im}\int\limits_{|x|=R}v.\,\mathbf{rot}\,\bar{v}\wedge\nu+|\lambda|\int\limits_{\Omega_R}\sigma(x)|v|^2\,\mathrm{d}x=0$$

et

$$\mathrm{Re}\int\limits_{|x|=R}v.\,\mathbf{rot}\,\bar{v}\wedge\nu+|\lambda|^2\int\limits_{\Omega_R}|v|^2\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\Omega_R}|\mathbf{rot}\,v|^2+|\mathrm{div}\,v|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

En combinant avec la condition de radiation sortante, on déduit que $v|_{\mathrm{supp}\,\sigma}=0$. De plus, de l'expression (24) on tire :

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{|x|=R}|v|^2\,\mathrm{d}\gamma(x)=0.$$

Suivant [20], on a qu'en dehors de la boule de rayon $R'>R$, v a l'expression :

$$v(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda|x|}}{|x|}\sum\frac{v_n(\frac{x}{|x|})}{|x|^n},$$

où cette série converge par rapport à $|x|$ et $\frac{x}{|x|}$, absolument et uniformément. Ceci implique que

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{|x|=R'}|v|^2\,\mathrm{d}\gamma(x)=\int\limits_{|x|=1}\left|v_0\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|^2+\frac{1}{R'}\int\limits_{|x|=1}\big[(\overline{v_0},v_1)+(v_0,\overline{v_1})\big]\,\mathrm{d}\gamma(x)+\cdots$$

converge pour $R'>R$. Soit $R'\to+\infty$, on aura :

$$\int\limits_{|x|=1}\left|v_0\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|^2=0$$

et par continuité de v_0, il s'ensuit que $v_0 = 0$. Par récurrence, on obtient que $v_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Par conséquent, $v \equiv 0$ pour $|x| > R$, et par le théorème d'unicité, il en résulte que $v \equiv 0$.

Maintenant, on démontre qu'au voisinage de zéro on a l'estimation :

$$\|\lambda \mathcal{N}_\chi(\lambda)\chi\| < +\infty, \quad \text{quand } \lambda \to 0, \tag{25}$$

où $\mathcal{N}(\lambda)$ ($\mathcal{N}_\chi(\lambda)$ est la résolvante tronquée associée) est la résolvante associée à l'unique solution vérifiant la condition de radiation sortante du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda^2 u = g \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u \wedge \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{26}$$

Comme dans [4], on montre que $\mathcal{N}_\chi$ est uniformément bornée dans le secteur angulaire d'ouverture $\frac{\pi}{2}$, symétrique autour de γ^{-1} :

$$\Lambda_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C}^*;\ \operatorname{Re}(\gamma\lambda) \geqslant |\operatorname{Im}(\gamma\lambda)|\}, \quad \gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

En effet, soit $g \in (L^2(\Omega))^3$ est à support dans B_R ; la fonction $\varphi = R(\lambda)g$ est l'unique solution vérifiant la condition de radiation sortante du problème (26).

On suit la démonstration de [4, Annexe B], on obtient pour $\lambda \in \Lambda_\gamma$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bar{u}.g &= \operatorname{Re}\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bar{u}(\Delta + \lambda^2)u\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{Re}\biggl[\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bigl(-|\mathbf{rot}\,u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 + \lambda^2|u|^2\bigr) \\ &\quad + \nabla\bigl(\mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bigr) \wedge \bar{u}.\,\mathbf{rot}\,u + \nabla\bigl(\mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bigr).\bar{u}.\operatorname{div} u.\biggr]\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{27}$$

Ceci implique :

$$\int \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)r}\bigl(|\mathbf{rot}\,u|^2 + |\operatorname{div} u|^2\bigr)\,\mathrm{d}x \leqslant c|\lambda|^2\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)r}|u|^2 + c\left|\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)r}\bar{u}.g\right|.$$

La relation (27) implique :

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)r}\bigl(|\mathbf{rot}\,u|^2 + |\operatorname{div} u|^2\bigr)\,\mathrm{d}x \leqslant C|\lambda|^2\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)}|u|^2 + \left|\int_\Omega \mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bar{u}g\right|, \tag{28}$$

donc pour $|\lambda| \leqslant 1$,

$$\int_{r>3R} \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)}|u|^2 \leqslant c\int_{\Omega\cap\{r<2R\}} |\mathbf{rot}\,u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 + |u|^2. \tag{29}$$

Les relations (28) et (29), pour $|\lambda| \leqslant 1$, entrainent :

$$\int_{\Omega\cap\{r<3R\}} |\mathbf{rot}\,u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 \leqslant c|\lambda|^2\int_{\Omega\cap\{r<3R\}} \bigl(|\mathbf{rot}\,u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 + |u|^2\bigr) + c\left|\int \mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bar{u}g\right|.$$

Puisque g est supportée dans l'ensemble $\Omega \cap \{r < R\}$, $\lambda \in \Lambda_\gamma$, $|\lambda|$ assez petit,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap\{r<3R\}} |\mathbf{rot}\,u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 &\leqslant c\left|\int_{\Omega\cap\{r<R\}} \mathrm{e}^{-4\gamma\lambda r}\bar{u}g\right| \\ &\leqslant c\biggl(\int_{\Omega\cap\{r<R\}} \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)r}|u|^2\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{\Omega\cap\{r<R\}} \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)r}|g|^2\biggr)^{1/2}. \end{aligned}$$

Maintenant, on montre que pour $u \in \{u \in \widetilde{H}^1,\ \operatorname{div} u|_{\partial\Omega} = 0,\ \nu \wedge u|_{\partial\Omega} = 0\}$ il existe une constante c tel que $\|u\|_{\widetilde{L}^2} \leqslant c(\|\operatorname{div} u\|_{L^2} + |\mathbf{rot}\, u\|_{L^2})$. En effet, supposons qu'il existe une suite $(u_n) \subset \{u \in \widetilde{H}^1,\ \operatorname{div} u|_{\partial\Omega} = 0,\ \nu \wedge u|_{\partial\Omega} = 0\}$ et $\|u_n\|_{\widetilde{L}^2} = 1$ (on peut supposer que (u_n) est dans l'orthogonal de $\mathcal{H}_2$ dans $L^2(\Omega)^3$) vérifiant $\|u_n\|_{\widetilde{L}^2} \leqslant n(\|\operatorname{div} u_n\|_{L^2} + |\mathbf{rot}\, u_n\|_{L^2})$, on utilise le fait que la norme $H^1(\Omega)$ est équivalente à la norme $\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{rot}\, u\|_{L^2(\Omega)}$. Donc (u_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$. Par injection compacte $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on en extrait une sous-suite convergente. Ainsi, il existe $u_0 = \lim_{n\to\infty} u_n$ dans $L^2(\Omega)$ vérifiant $\operatorname{div} u_0 = 0$, $\mathbf{rot}\, u_0 = 0$, $u_0 \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0$ ce qui entraine que $u_0 \in \mathcal{H}_2$, ce qui est absurde. □

Donc, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int\limits_{\Omega\cap\{r<3R\}} |\mathbf{rot}\, u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 \leqslant c\biggl(\int\limits_{\Omega\cap\{r<3R\}} |\mathbf{rot}\, u|^2 + |\operatorname{div} u|^2\biggr)^{1/2} \biggl(\int \mathrm{e}^{-4\operatorname{Re}(\gamma\lambda)r} |g|^2\biggr)^{1/2}.$$

On obtient alors une borne uniforme de la résolvante de $\widetilde{L}^2$ dans $\widetilde{H}$ pour λ proche de 0 dans le secteur Λ_γ. En choisissant un nombre fini de réels γ_i, on recouvre un voisinage du demi-plan supérieur (dont on exclu 0) par $\bigcup \Lambda_{\gamma_i}$, ce qui permet de conclure que la résolvante est bornée au voisinage de 0 et on a la supposition (1.1) dans [19], ce qui implique qu'on a, pour $\lambda \to 0$ et $|\arg(\lambda) + \frac{\pi}{2}| \leqslant \pi$, le comportement suivant :

La proposition suivante donne le comportement au voisinage de zéro, elle découle de la Proposition 3.1 de [19].

Proposition 12. *$\mathcal{N}_\chi$ n'admet pas de points d'accumulation, ne coupe pas l'axe réel et admet le comportement suivant* :

$$\mathcal{N}_\chi(\lambda) = \lambda^{-1}\mathcal{M}_3 + \mathcal{F}_3(\lambda),$$

où $\operatorname{rang}(\mathcal{M}_3) \leqslant 1$ *et* $\mathcal{F}_3$ *est analytique en* $\lambda = 0$.

Remarque 13. La Proposition 12 implique que $\lambda\mathcal{N}_\chi(\lambda)$ est analytique en $\lambda = 0$ et de la démonstration de l'estimation (25), on remarque que $\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\mathcal{N}_\chi(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to 0$.

Démonstration. Soit $\mathcal{N}(\lambda) : \widetilde{L}^2_{\mathrm{comp}} \mapsto \widetilde{L}^2_{\mathrm{comp}}$ l'opérateur défini par $\mathcal{N}(\lambda) f$ est l'unique solution de $(-\Delta - \lambda^2)u = f$, $\operatorname{div} u|_{\partial\Omega} = 0$, $u \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0$ et u vérifie (CRS). Soit alors $f \in \widetilde{L}^2(\Omega)^3$ à support dans B_R ; $\sigma(x)$ est aussi à support dans B_R, la solution u du système :

$$\bigl(-\Delta - \lambda^2 + 2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\bigr)u = f + 2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)u, \quad \operatorname{div} u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0$$

et u satisfait CRS telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda) f = u &= \mathcal{N}_\sigma(\lambda)\bigl(f + 2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\bigr) \\ &= \mathcal{N}_\sigma(\lambda)\bigl(f + 2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\mathcal{N}(\lambda) f\bigr) \\ &= \mathcal{N}_\sigma(\lambda)\bigl[I + 2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\mathcal{N}(\lambda)\bigr] f. \end{aligned}$$

Ainsi que pour tout $f \in \widetilde{L}^2$, à support dans B_R,

$$\mathcal{N}_\chi(\lambda) f = \mathcal{N}_{\sigma,\chi}(\lambda)\bigl[I + 2\mathrm{i}\lambda\sigma(x)\mathcal{N}_\chi(\lambda)\bigr] f.$$

En tenant compte de la Remarque 13, on a que $\mathcal{N}_\chi(\lambda)$ et $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}(\lambda)$ ont le même comportement près de 0. □

3.1. Etude des hautes fréquences

Cette partie est consacrée à la démonstration du Théorème 8. Comme $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}$, considéré comme opérateur de $\widetilde{L}^2(\Omega)^3$ dans $\widetilde{H}^1\Omega)$, est méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\{\operatorname{Im} \lambda < 0\}$; c, δ_0 et λ_0 ne dépendent pas de λ. De plus, on peut vérifier que $\mathcal{N}_{\sigma,\chi}(-\bar{\lambda}) = \overline{\mathcal{N}_{\sigma,\chi}(\lambda)}$, donc on va limiter notre étude à l'ensemble $\operatorname{Re} \lambda > 0$. La démonstration de (14) utilise sur un raisonnement par l'absurde.

On suppose que pour tout c (en particulier pour $\lambda_n = c = n \in \mathbb{N}$), il existe $f_n \in L^2$ et $\operatorname{supp} f_n \in B_R$, tel que $\operatorname{Im}(\lambda_n) \to 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_n) \geqslant n$ (on suppose par exemple que $\operatorname{Re}(\lambda_n) \geqslant 0$) tel que

$$\left\|\mathbf{rot}\,\mathcal{N}_\sigma(\lambda_n) f_n\right\|_{L^2_R}^2 + \left\|\operatorname{div}\mathcal{N}_\sigma(\lambda_n) f_n\right\|_{L^2_R}^2 + \left\|\lambda_n\mathcal{N}_\sigma(\lambda_n) f_n\right\|_{L^2_R}^2 \geqslant n\|f_n\|_{L^2}^2.$$

On note $u_n = \mathcal{N}_\sigma(\lambda_n) f_n$, on normalise par,

$$\|\mathbf{rot}\,u_n\|_{L^2_R}^2 + \|\operatorname{div} u_n\|_{L^2_R}^2 + \|\lambda_n u_n\|_{L^2_R}^2 < \infty.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u_n - \lambda_n^2 u_n - \mathrm{i}2\lambda_n\sigma u_n = f_n \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u_n = 0, \quad \nu \wedge u_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u_n \text{ satisfait (CRS)}, \end{cases}$$

$$\|\mathbf{rot}\,u_n\|_{L^2_R}^2 + \|\operatorname{div} u_n\|_{L^2_R}^2 + \|\lambda_n u_n\|_{L^2_R}^2 = 1, \quad \|f_n\|_{L^2_R} \to 0 \quad \text{et} \quad \|u_n\|_{L^2_R} \to 0, \tag{30}$$

$1/\operatorname{Re}(\lambda_n) \to 0$, et $\operatorname{Im}(\lambda_n) \to 0$.

Lemme 14. *On a $u_n \rightharpoonup 0$ dans $\widetilde{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\lambda_n u_n \rightharpoonup 0$ dans $\widetilde{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)^3$.*

Remarque 15. Les résultats du Lemme 14 sont aussi vérifiés dans $(H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))^3$ et $(L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega))$.

Démonstration. On a que (30) implique que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $\widetilde{H}^1_R = \{u \in \widetilde{H}^1,\ \operatorname{supp} u \subset B_R\}$ et de plus,

$$\lambda_n u_n = -\frac{1}{\lambda_n}\Delta u_n - \frac{1}{\lambda_n} f_n. \tag{31}$$

En effectuant le produit scalaire avec $\varphi \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_n u_n, \varphi\rangle &= \left\langle -\frac{1}{\lambda_n}\Delta u_n - \frac{1}{\lambda_n} f_n, \varphi\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\lambda_n}\operatorname{div} u_n, \operatorname{div}\varphi\right\rangle + \left\langle \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{rot}\,u_n, \mathbf{rot}\,\varphi\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\lambda_n} f_n, \varphi\right\rangle, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\left|\langle \lambda_n u_n, \varphi\rangle\right| \leqslant \left(\left\|\frac{1}{\lambda_n}\mathbf{rot}\,u_n\right\|_{L^2_R} + \left\|\frac{1}{\lambda_n}\operatorname{div} u_n\right\|_{L^2_R} + \left\|\frac{1}{\lambda_n} f_n\right\|_{L^2_R}\right)\|\varphi\|_H,$$

ce qui implique que $\lambda_n u_n \rightharpoonup 0$ dans $\widetilde{L}^2_R$.

Soit $\chi \in C_0^{+\infty}$ vaut 1 près du bord, à support dans B_R. On pose $w_n = (1-\chi)u_n$, on vérifie que

$$-\left(\lambda_n^2 + \Delta\right) w_n = [\Delta, \chi]u_n - (1-\chi) f_n, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

donc $w_n = \mathcal{N}_0(\lambda_n) g_n$ où $\mathcal{N}_0$ est la résolvante sortante libre du laplacien et

$$g_n = [\Delta, \chi]u_n - (1-\chi) f_n$$

est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, à support dans B_R. On a :

$$\mathcal{N}_0(\lambda_n) f_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t}\Theta_0(t) g_n \,\mathrm{d}t,$$

où $\Theta_0(t)$ est le propagateur libre. Ainsi par intégration par parties et en remarquant que l'énergie locale tend vers 0 en $+\infty$,

$$\lambda_n \mathcal{N}_0(\lambda_n) g_n = -\mathrm{i}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t}\partial_t\Theta_0(t) g_n \,\mathrm{d}t.$$

Comme $\operatorname{Im}\lambda_n \leqslant \delta_0$, pour $\operatorname{Re}\lambda_n$ assez grand pour $R' > R$, on a :

$$\|\mathbf{rot}\, w_n\|^2_{L^2(B_{R'})} + \|\operatorname{div} w_n\|^2_{L^2(B_{R'})} + \|\lambda_n w_n\|^2_{L^2(B_{R'})} \leqslant c\|g_n\|^2.$$

On démontre cette inégalité en utilisant le principe de Huyghens. ($E_{t-R}(u(t))f = 0$ pour $t \geqslant R$ et tout $f \in H_R$.) On déduit que w_n est bornée dans $\widetilde{H}^1_{\mathrm{loc}}(B_R^c)^3$ et que $\|w_n\|_{L^2_{\mathrm{loc}}} \to 0$. Ainsi $u_n \rightharpoonup 0$ dans $\widetilde{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et (31) implique que $\lambda_n u_n \rightharpoonup 0$ dans $\widetilde{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)^3$.

On pose :

$$v_n(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda_n} u_n(x).$$

On déduit du Lemme 14 que $v_n \rightharpoonup 0$ dans $\widetilde{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$. On peut ainsi associer une mesure de défaut microlocale μ dans $\widetilde{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})$ (voir [6]).

La suite v_n vérifie l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_n - \Delta v_n + (2\sigma(x) - 2\delta_0)\partial_t v_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda_n}\widetilde{f}_n, \\ \operatorname{div} v_n = 0, \quad \nu \wedge v_n(t,x) = 0, \end{cases} \tag{32}$$

avec $\widetilde{f}_n = f_n + \operatorname{Im}\lambda_n(2\sigma - 2\delta_0) + 2\mathrm{i}\operatorname{Re}\lambda_n(\operatorname{Im}\lambda_n - \delta_0)u_n$. On vérifie que $\|\widetilde{f}_n\|_{L^2_{\mathrm{loc}}}$ tend vers zéro, car

$$\|f_n\|_{L^2} \to 0, \quad \big\|\operatorname{Im}\lambda_n\big(2\sigma(x) - \operatorname{Im}\lambda_n\big)u_n\big\|^2_{L^2_{\mathrm{loc}}} \leqslant c\|u_n\|^2_{L^2_{\mathrm{loc}}} \to 0,$$

et

$$\big\|\operatorname{Re}\lambda(\operatorname{Im}\lambda - \delta_0)u_n\big\|^2_{L^2_{\mathrm{loc}}} \leqslant c|\operatorname{Im}\lambda_n - \delta_0| \cdot \|\lambda_n u_n\|_{L^2_{\mathrm{loc}}} \leqslant c|\operatorname{Im}\lambda_n - \delta_0| \to 0.$$

Ainsi $(\partial_t^2 - \Delta)v_n$ converge fortement vers zéro dans $\widetilde{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R})^3$. On peut donc appliquer le théorème de régularité microlocale pour les mesures de défaut. □

3.2. Construction de mesures de défaut microlocales

On note $\mathcal{A}$ l'espace des matrices 3×3 d'opérateurs Q de la forme $Q = Q_i + Q_\partial$ où Q_i est un opérateur pseudo-différentiel classique sur $\mathbb{R} \times \Omega$, à support compact dans $\mathbb{R} \times \Omega$ (i.e. vérifiant $Q_i = \varphi Q_i \varphi$ pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R}, \operatorname{end}(\mathbb{C}^3))$) et où Q_∂ est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel classique à support compact près du bord.

On notera $\mathcal{A}^\alpha$ les éléments de $\mathcal{A}$ qui sont de degré $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et v une solution de (32). Pour $Q \in \mathcal{A}^0$ à support compact dans I. Localement près du bord, on choisit le système de coordonnées géodésiques normal : $(x', x_3) \in X = \partial\Omega \times [0, r_0] \mapsto x \in \Omega$, $x_3 = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \operatorname{dist}(x, x')$ où $r_0 > 0$ est assez petit. Dans ce système, le symbole principal de $-\Delta$ est $\xi^2 + \mathcal{R}(x_3, x', \xi')$, et $\mathcal{R}_0(x', \xi') = \mathcal{R}|_{x_3=0}$ est la forme métrique sur $T^*\partial\Omega$.

On note $T_b\overline{X}$ le fibré de rang $\dim X$ dont les sections sont les champs de vecteurs tangents à ∂X, $T_b^*\overline{X}$ son fibré dual et $j : T^*\overline{X} \mapsto T_b^*\overline{X}$ l'application canonique. Près du ∂X, $T_b X$ est engendré par les champs ∂_t, $\partial_{x'}$, $s\partial_s$ et j défini par :

$$j(x', t; \xi', \xi, \tau) = (x', t; \xi', v = s\xi, \tau).$$

On note $P = \partial_t^2 - \Delta + \sigma(x)\partial_t$, $p = |\xi|^2 - \tau^2$ son symbole principal, $\Sigma = p^{-1}(0)$ sous-variété caractéristique. On pose :

$$Z = j(\Sigma), \quad \widetilde{Z} = Z \cup j(T^*X|_{x_3=0}).$$

On a $Z|_{x_3=0} = \{(x', 0, t; \xi', v = 0, \tau);\ |\xi'| \leqslant |\tau|\}$ et $\widetilde{Z}|_{x_3=0} = T^*(I \times \partial\Omega) = Z|_{x_3=0} \cup \mathbf{E}$ où $\mathbf{E}$ est la région elliptique du bord. Comme pour $s \in [0, r]$, on a $p = \xi^2 + \mathcal{R}(s, x', \xi') - \tau^2$, $\mathcal{R} \geqslant 0$, alors

$$(x', t; \xi', v, \tau) \in \widetilde{Z}, \quad x_3 \in [0, r] \text{ implique que } |v| \leqslant s|\tau|.$$

Il en résulte que $\widetilde{Z}$ et Z sont coniques, fermés dans T_b^*X. On notera $S\widetilde{Z}$, SZ les espaces quotients sphériques,

$$S\widetilde{Z} = (\widetilde{Z} \setminus X)/\mathbb{R}_+^*, \qquad SZ = (Z \setminus X)/\mathbb{R}_+^*,$$

qui sont des espaces métriques localement compacts.

Pour $Q \in \mathcal{A}^0$, de symbole principal q on définit la fonction $\kappa(q) \in C^0(S\widetilde{Z}, \mathrm{end}(\mathbb{C}^3))$ par :

$$\kappa(q)(\rho) = q\big(j^{-1}(\rho)\big)$$

et l'ensemble

$$\big\{\kappa(q),\ q = \sigma(Q),\ Q \in \mathcal{A}^0\big\},$$

localement dense dans $C^0(S\widetilde{Z}, \mathrm{end}(\mathbb{C}^3))$, où $C^0(S\widetilde{Z}, \mathrm{end}(\mathbb{C}^3))$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Pour $Q \in \mathcal{A}_0$, $u \in \widetilde{H}^1$ on pose :

$$\Psi(Q, v) = (Qv, v)_{\widetilde{H}^1} = (\nabla_x Qv, \nabla_x v)_{L^2} + (\partial_t Qv, \partial_t v)_{L^2} + (Qv, v)_{L^2}.$$

On notera $\mathcal{M}^+$ l'espace des mesures boréliennes μ sur $S\widetilde{Z}$, à valeurs hermitiennes positives sur $\mathbb{C}^3$; une mesure $\mu \in \mathcal{M}_+$ est donc dans l'espace dual de l'espace $C_0^0(S\widetilde{Z}; \mathrm{end}(\mathbb{C}^3))$ et vérifie :

$$\langle \mu, q\rangle \geqslant 0, \quad \forall q \in C_0^0\big(S\widetilde{Z}; \mathrm{end}^+(\mathbb{C}^3)\big),$$

où $\mathrm{end}^+(\mathbb{C}^3)$ désigne l'ensemble des matrices 3×3 hermitiennes, positives.

Soit (v_k) une suite de solutions du problème (32), bornée dans $H^1(I \times \Omega)$ et qui converge faiblement vers 0.

Proposition 16. (Burq–Lebeau [6].) *Quitte à extraire une sous suite de la suite (v_n) il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+$ telle que*

$$\forall Q \in \mathcal{A}^0, \quad \lim \Psi(Q, v_n) = \big\langle \mu, \kappa(q)\big\rangle.$$

Dans notre cas, la condition de Lopatinski uniforme n'est pas vérifiée près d'un point glissant, on s'intéresse alors à la propagation des supports des mesures de défaut microlocales.

3.2.1. Propagation des mesures de défaut microlocales

On supposera que le bord Ω n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes et on note $G(s)$ le flot bicaractéristique généralisé de Melrose–Sjöstrand.

On sait que $S\widetilde{Z}$ admet deux composantes connexes définies par $\pm\tau > 0$. On identifie $S\widetilde{Z}^+ = S\widetilde{Z} \cap \{\tau > 0\}$ à $S\widetilde{Z} \cap \{\tau = -\frac{1}{2}\}$ et on note μ^+ la restriction de μ sur $S\widetilde{Z}^+$. On a le théorème de propagation :

Théorème 17. (Lebeau [13].) *Il existe $c > 0$, tel que $\forall s \in \mathbb{R}$, $|G(s)^*\mu^+| \leqslant c|\mu^+|$ c'est-à-dire, pour tout borélien B de $S\widetilde{Z}^+$:*

$$\big\langle \mu^+, G(s)B\big\rangle \leqslant c\langle \mu^+, B\rangle.$$

Démonstration. Il suffit de prouver que $\forall K$ et K' compacts de $S\widetilde{Z} \cap (t = 0)$ vérifiant $K' \Subset \operatorname{int} K$ et $\forall J' = [b_0', b_1'] \subset J = [b_0, b_1]$,

$$\big\langle \mu^+, G(s)K'_{J'}\big\rangle \leqslant c\langle \mu^+, K_J\rangle,$$

où $K_J = \{G(\sigma)\rho;\ \sigma \in J \text{ et } \rho \in K\}$. Soit $Q_0 \in \mathcal{A}^0$ un opérateur scalaire pseudo-différentiel tel que $SE(Q_0) \subset K_J$ ($SE(Q_0) =$ le support essentiel de Q_0) ; $0 \leqslant \sigma(Q) \leqslant 1$ et $Q_0 = \mathrm{Id}$ sur K_{1J_1} avec $K'_{J'} \subset K_{1J_1} \subset K_j$.

On considère aussi un opérateur Q_1 de $\mathcal{A}^0$ vérifiant $SE(Q_1) \subset K_{1J_1+s}$, $0 \leqslant \sigma(Q_1) \leqslant 1$ et $Q_1 = \mathrm{Id}$ sur $K'_{J'+s}$.

Soit I_0 un intervalle borné contenant $[b_0, b_1 + s]$. On pose :

$$F = \big\{u \in \big(H^{1/2}(\Omega \times I_0)\big)^3;\ \text{solution de (32) satisfait } Q_0 u \in \big(H^1(\Omega \times I_0)\big)^3\big\}.$$

Montrons qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\|Q_1 u\|_H \leqslant c\big\{\|Q_0 u\|_{H^1} + \|u\|_{H^{1/2}(\Omega \times I_0)}\big\}, \quad \forall u \in F. \tag{33}$$

Vérifions tout d'abord le résultat de régularité suivant :

$$\text{Si } u \in F \quad \text{alors } Q_1 u \in \big(H^1(\Omega \times I_0)\big)^3.$$

Puisque $SE(Q_1) \subset K_{1J_1+s}$ alors pour montrer que $Q_1 u \in (H^1(\Omega \times I_0))^3$, il suffit de vérifier que

$$u \in H^1_\rho; \quad \forall \rho \in K_{1J_1+s}.$$

Soit $\rho \in K_{1J_1+s}$ alors $G(-s)\rho \in K_{1J_1}$, on sait que $Q_0 u \in H^1$ et $Q_0 = \mathrm{Id}$ près de K_{1J_1}, on déduit alors que $G(-s)\rho \notin WF^1_b(u)$ (le front d'onde au bord de u). En appliquant le théorème de propagation des singularités de [17], on conclut que $u \in H^1_\rho$.

On munit F de la norme $|u|_F = \|Q_0 u\|^2_{H^1} + \|u\|^2_{H^{1/2}(\Omega\times I_0)}$ et on considère l'application :

$$\psi : F \to \left\{u \in \left(H^{1/2}(\Omega \times I_0)\right)^3;\ \text{solution de (32) } Q_1 u \in \left(H^1(\Omega \times I_0)\right)^3\right\},$$
$$u \mapsto Q_1 u.$$

D'après ce qui précède, ψ est bien définie, et en utilisant [17], on a que le graphe de ψ est fermé, ce qui implique que ψ est continue, et il en résulte l'inégalité (33).

Puisque $Q_1^* Q_1 = \mathrm{Id}$ sur $K'_{J'+s}$,

$$\langle \mu^+, K'_{J'+s}\rangle \leqslant \lim_{k\to+\infty} \|Q_1 u_k\|_{H^1}.$$

D'autre part, on a $SE(Q_0) \subset K_J$ et $0 \leqslant \sigma_0 \leqslant 1$, donc

$$\langle \mu^+, K_J\rangle \geqslant \lim_{k\to+\infty} \|Q_0 u_k\|_{H^1}.$$

Alors, on conclut de l'inégalité (33) que

$$\langle \mu^+, K'_{J'+s}\rangle \leqslant c\langle \mu^+, K_J\rangle. \qquad \square$$

Maintenant, nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 18. *Pour tout $x \notin \operatorname{supp}\sigma$, on a* :

(1) *Pour tout $q \in C^0(S\widetilde{Z}, \mathrm{end}(\mathbb{C}^3))$ à support au voisinage de x*

$$\langle \mu, q\rangle = \langle \mu, \Pi q\rangle = \langle \mu, q\Pi\rangle = \langle \mu, \Pi q \Pi\rangle,$$

et donc on dit que l'opérateur Π définit μ presque partout en dehors de $\operatorname{supp}\sigma$ *et vaut,*

$$\Pi = \mathrm{Id} - \Pi^\perp.$$

(2) *Pour tout $x \notin B_R$,*

$$\operatorname{supp}\mu \subset \left\{(x,t,\xi,\tau);\ |\xi|^2 = \tau^2 \text{ et } x.\xi < 0\right\}.$$

Où $\Pi = \Pi(x,\xi)$ l'opérateur égal au projecteur orthogonal sur le plan orthogonal à ξ.

Démonstration. (1) Comme dans [6], si Q est un opérateur pseudo-différentiel sur $\Omega \times \mathbb{R}$, d'ordre 2, à support ne rencontre pas le support de σ, on peut remarquer que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega\times\mathbb{R}} (Qv_k, v_k)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \left\langle \mu, \frac{q}{\tau^2 + \|\xi\|^2}\right\rangle, \tag{34}$$

où q est le symbole principal de Q. Soit B un opérateur pseudo-différentiel de degré 0, tangentiel près du bord à support qui ne rencontre pas le support de σ, de symbole principal b, pour $Q = B\nabla\operatorname{div}$. En utilisant, $\operatorname{div} u = 0$ pour tout $x \notin \operatorname{supp}\sigma$. On obtient que

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega\times\mathbb{R}} (Qv_k, v_k)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \left\langle \mu, \frac{q}{\tau^2 + \|\xi\|^2}\right\rangle = \left\langle \mu, \frac{q}{\tau^2 + \|\xi\|^2}\right\rangle,$$

et

$$q=\|\xi\|^2 b\Pi^{\perp},$$

ce qui implique la première relation. La deuxième s'obtient de la première puisque la mesure μ est hermitienne et la troisième relation est une conséquence des deux premières.

(2) Soit $x_0\in\Omega$, $|x_0|>R$ et $(\xi_0,\tau_0)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$ tel que $x_0.\xi_0\geqslant 0$. Soit $\chi\in C_0^\infty(\Omega,\mathrm{end}(\mathbb{C}))$, à support dans un voisinage V_{x_0} de x_0 inclus dans B_R^c et $\psi\in C_0^\infty([0,T])$ pour $T>0$. Soit $a(x,\xi,\tau)\in C_0^0(SZ,\mathrm{end}(\mathbb{C}^2))$, homogène d'ordre zéro, un symbole de microlocalisation près de (x_0,ξ_0,τ_0), valant I en ce point. On a :

$$\langle a(x,D_x,D_t)\psi\chi v_n,\psi\chi v_n\rangle_{H^1_{x,t}}\to\int\limits_{\Omega\times[0,T]\times S^3} a(x,\xi,\tau)\psi\chi\,\mathrm{d}\mu.$$

Pour déduire le résultat 2 du Lemme 18, il suffit de montrer que

$$\langle a(x,D_x,D_t)\psi\chi\nabla v_n,\psi\chi\nabla v_n\rangle_{L^2}+\langle a(x,D_x,D_t)\psi\chi\partial_t v_n,\psi\chi\partial_t v_n\rangle_{L^2}\to 0.$$

Comme $u_n=w_n$ sur B_R^c et en remarquant qu'une dérivation en espace de w_n ou en temps de v_n est essentiellement une multiplication par λ_n. Donc, il suffit de montrer que $\lambda_n a(x,D_x,D_t)\psi\chi v_n$ tend vers 0 pour la norme uniforme. Ce résultat se déduit des travaux de [5,10]. □

Maintenant, grâce aux Lemmes 14 et 18, on va aboutir à une absurdité en utilisant le Théorème 17. On rappelle que v_n vérifie le système des équations des ondes amorties :

$$\begin{cases}\partial_t^2 v_n-\Delta v_n-(2\sigma-2\delta_0)\partial_t v_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda_n}\widetilde{f}_n,\\ \operatorname{div} v_n=0,\quad v_n\wedge\nu=0\quad\text{sur }\partial\Omega,\end{cases}\tag{35}$$

avec $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda_n}\widetilde{f}_n\|_{L^2_{\mathrm{loc}}}\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.

Ainsi, on reprend la démonstration de [10], pour tout ω borélien en (x,t,ξ,τ) dans $T^*B_R\times[0,T]$, $T>0$, on a :

$$\langle\mu,G(s)(\omega)\rangle=\left\langle\exp\left(\int_0^s\bigl(2\sigma\bigl(G(\theta)(x,t,\xi,\tau)\bigr)-2\delta_0\bigr)\,\mathrm{d}\theta\right)\mu,\omega\right\rangle,\tag{36}$$

où $G(s)$ est le flot bicaractéristique généralisée associé à l'opérateur scalaire $\square$ dans $\mathcal{A}^2$. On rappelle que $\{G(s)\}$ est un groupe de C^0-homéomorphismes.

On a $\operatorname{supp}\mu\cap B_R\neq\emptyset$, car si non $\mu=0_{\mathcal{M}}$ sur B_R. En appliquant alors le Lemme 18 et le Théorème 17, on aurait $\mu=0$ sur $B_{R'}$, $R'>R$ et donc $v_n\to 0$ dans $(H^1_{x,t}(B_R\times[0,T]))^3$. Ainsi

$$u_n\to 0\text{ dans }H^1(\Omega_R)^3\quad\text{et}\quad\lambda_n\to 0\text{ dans }L^2(\Omega_R)^3,$$

ce qui est absurde car

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2_R}+\|\lambda u_n\|^2_{L^2_R}=1.$$

Soit donc ω un borélien de $T^*B_R\times[0,1]$ tel que $\langle\mu,\omega\rangle\neq 0$, on écrit $\omega=\omega_1\cup\omega_2$ où ω_1 et ω_2 sont les deux boréliens définis par :

$$\omega_1=\{\rho\in\omega;\ \exists s\leqslant 0\ G(s)\rho\notin B_R\times\mathbb{R}\},\qquad\omega_2=\{\rho\in\omega;\ \forall s\leqslant 0\ G(s)\rho\in B_R\times\mathbb{R}\}.$$

On a $\langle\mu,\omega\rangle=\langle\mu,\omega_1\rangle+\langle\mu,\omega_2\rangle$. Or $\langle\mu,\omega_1\rangle=0$, car si $\rho\in\omega_1$, il existe s tel que $G(s)\rho\notin B_R\times(T,+\infty)$. La condition de radiation sortante entraine que $G(s)$ est sortante ([12]) puis on utilise Lemme 18, on obtient que $\langle\mu,\omega_1\rangle=0$. Ainsi $\langle\mu,\omega\rangle=\langle\mu^+,\omega_2\rangle$. On remarque que si Ω est non captif, $\omega=\omega_1$ implique que $\langle\mu,\omega\rangle=0$ ce qui est absurde. Il reste le cas où Ω est captif avec l'hypothèse de (C.G.E.) au dessus de B_R.

On a $G(s)\omega_2\subset T^*B_R\times[s,s+1]$ quel que soit $s\geqslant 0$, donc

$$\langle\mu,G(s)\omega_2\rangle\leqslant\langle\mu,B_R\times[s,s+1]\rangle\leqslant\|v_n\|^2_{H^1(\Omega_R\times[0,1])}\leqslant 1.\tag{37}$$

En remarquant que toutes les bicaractéristiques issues de ω_2 sont captives, on obtient d'après (36) :

$$\langle\mu,G(s)\omega_2\rangle\geqslant\mathrm{e}^{[2C(s)-2\delta_0]s}\langle\mu,\omega_2\rangle.\tag{38}$$

On a $\delta_0 < C(\infty)$, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\delta_0 \leqslant C(\infty) + \epsilon$.

Soit $s_0 > 0$ tel que $C(\infty) - C(s_0) \geqslant \frac{\epsilon}{2}$; pour tout $s \geqslant s_0$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \mu, G(s)\omega_2 \rangle &\geqslant \mathrm{e}^{[2C(s)-2C(\infty)+2C(\infty)-2\delta_0]s} \langle \mu, \omega \rangle \\ &\geqslant \mathrm{e}^{(-\epsilon+2\epsilon)s} \langle \mu, \omega \rangle \\ &\geqslant \mathrm{e}^{\epsilon s} \langle \mu, \omega \rangle.\end{aligned}$$

Pour s assez grand on obtient $\langle \mu, G(s)\omega_2 \rangle > 1$ (car $\langle \mu, \omega \rangle \neq 0$), ce qui contredit (37).

3.3. Décroissance de l'énergie locale

Dans cette section on montre le Théorème 6. Comme dans [14], on considère une fonction $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour } t \geqslant 2. \end{cases}$$

Soit $V_\sigma(t) = \varphi(t)U_\sigma(t)$ où $U_\sigma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tG_\sigma}$ et $G_\sigma = -\mathrm{i}A_\sigma$. La transformée de Fourier,

$$\widehat{V}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t} V_\sigma(t)\,\mathrm{d}t,$$

est bien définie pour $\operatorname{Im}\lambda < 0$, comme opérateur borné de $\widetilde{H}$. On a :

$$V_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Im}\lambda=-\epsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \widehat{V}_\sigma(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall \epsilon > 0,$$

et vérifie

$$(\partial_t - \mathrm{i}G_\sigma)V_\sigma(t) = \varphi'(t)U_\sigma(t). \tag{39}$$

Donc $\widehat{V}(\lambda) = \mathrm{i}(G_\sigma - \lambda)^{-1}\widehat{\varphi' U}(\lambda)$ avec $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Comme $\varphi'(t)U_\sigma(t)f$ est à support compact indépendant de t, alors $\widehat{\varphi' U}(\lambda) : \widetilde{H} \mapsto \widetilde{H}$ est analytique sur $\mathbb{C}$. De plus $(G_\sigma - \lambda)^{-1} : \widetilde{H}_{\mathrm{comp}} \mapsto \widetilde{H}_{\mathrm{loc}}$ s'étend à un opérateur méromorphe sur $\mathbb{C}$ et on a :

$$(G_\sigma - \lambda)^{-1} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathcal{N}_\sigma(\lambda)(\sigma + \mathrm{i}\lambda) & \mathcal{N}_\sigma(\lambda) \\ \lambda\mathcal{N}_\sigma(\lambda)(\sigma + \mathrm{i}\lambda) - \mathrm{Id} & \mathrm{i}\lambda\mathcal{N}_\sigma(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Le Théorème 8 implique que

$$\exists c > 0 \text{ tel que} \quad \left\| (G_\sigma - \lambda)^{-1} f \right\|_R \leqslant c\|f\|, \tag{40}$$

d'après l'Éq. (39), on a :

$$\begin{aligned} V_\sigma(t)f &= \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Im}\lambda=-\epsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}(G_\sigma - \lambda)^{-1}\widehat{\varphi' U}(\lambda)f\,\mathrm{d}\lambda, \quad \forall \epsilon > 0 \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}\big(G_\sigma - (z + \mathrm{i}\delta)\big)^{-1}\widehat{\varphi' U}(\lambda)f\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \lim_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re}\lambda=-\epsilon;\, 0\leqslant \operatorname{Im}\lambda\leqslant\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}(G_\sigma - \lambda)^{-1}\widehat{\varphi' U}(\lambda)f\,\mathrm{d}\lambda - \int_{\operatorname{Re}\lambda=\epsilon;\, 0\leqslant \operatorname{Im}\lambda\leqslant\delta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}(G_\sigma - \lambda)^{-1}\widehat{\varphi' U}(\lambda)f\,\mathrm{d}\lambda \right\} \\ &= \mathrm{e}^{-\delta t}W_1(t)f + W_2(t)f. \end{aligned} \tag{41}$$

On a $W_2(t)f = 0$ (voir [18]), pour estimer $\|W_1(t)f\|$ on utilise l'identité de Plancherel avec l'inégalité (40). On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| W_1(t) f \right\|_R^2 \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \left(G_\sigma - (z+\mathrm{i}\delta)\right)^{-1} \widehat{\varphi' U}(z+\mathrm{i}\delta) \right\|^2 \mathrm{d}z \\ &\leqslant c \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \widehat{\varphi' U}(z+\mathrm{i}\delta) \right\|^2 \mathrm{d}z \\ &= c \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \varphi'(t) U(t) \right\|^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant c \|f\|^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que $\chi = 1$ sur $|x| \leqslant R$. On a :

$$\begin{aligned}(\partial_t - \mathrm{i}G_\sigma)\chi W_1(t) f &= \delta \chi W_1(t) f - \mathrm{i}\chi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tz} \widehat{\varphi' U}(z+\mathrm{i}\delta)\, \mathrm{d}z \\ &= \widetilde{W}_1(t) f. \end{aligned} \tag{43}$$

Soit alors t_0 tel que

$$\left\| W_1(t_0) f \right\|_R \leqslant c \|f\|.$$

On a :

$$\chi W_1(t) f = U(t) \chi W_1(t_0) f + \int_{t_0}^{t} U(t - t_0 - s) \widetilde{W}_1(s) f \,\mathrm{d}s, \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\left\| W_1(t) f \right\|_R \leqslant \left\| \chi W_1(t) f \right\| &\leqslant c\|f\| + \int_{t_0}^{t} \left\| \widetilde{W}_1(s) f \right\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant c\|f\| + ct^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \widetilde{W}_1(s) f \right\| \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant ct^{\frac{1}{2}} \|f\|, \quad t \geqslant 1. \end{aligned} \tag{45}$$

Des relations (41) et (45), on obtient le Théorème 9.

Remarque 19. Comme dans [10], on obtient que le meilleur taux de décroissance défini par :

$$\delta_1 = \sup\left\{\delta > 0;\ \exists c > 0,\ \forall f \in H,\ \operatorname{supp} f \subset B_R,\ E_R(u)(t) \leqslant c\mathrm{e}^{-\delta t} E(u)(0),\ \forall t > 0\right\},$$

est donné par $\delta_1 = 2\min(D(0), C(\infty))$.

4. Démonstration du Théorème 1

En utilisant la décomposition orthogonale dans la Section 2, le champ électrique $e \in C^1([0, +\infty[, (L^2(\Omega))^3)$ s'écrit $e = -\nabla p + w$, où $p \in C^1([0, +\infty[, W_0^1(\Omega))$ et $w \in C^1([0, +\infty[, (L^2(\Omega))^3$, à divergence nulle). La solution w vérifie le système hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t^2 w - \frac{1}{\mu} \Delta w + \sigma \partial_t w - \sigma \partial_t \nabla p - \varepsilon \partial_t^2 \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \operatorname{div} w = 0, \quad w \wedge \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, +\infty[, \\ w(.,0) = e(.,0) = e_0, \quad \partial_t w(.,0) = \partial_t e(.,0) = e_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Par la formule de Duhamel et les notations du Section 2.2, la solution s'écrit :

$$\begin{pmatrix} w(x,t) \\ \partial_t w(x,t) \end{pmatrix} = U_\sigma(t)\begin{pmatrix} w(x,0) \\ \partial_t w(x,0) \end{pmatrix} + \int_0^t U_\sigma(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma\partial_t \nabla p(x,s) + \varepsilon\partial_t^2 p(x,s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

avec $|U_\sigma(t)|_H \leqslant c\exp^{-\beta t}$. Par conséquent, on a :

$$\left\|\begin{pmatrix} w(x,t) \\ \partial_t w(x,t) \end{pmatrix}\right\|_{H_R}^2 \leqslant c\mathrm{e}^{-2\beta t}\left\|\begin{pmatrix} w(x,0) \\ \partial_t w(x,0) \end{pmatrix}\right\|_{H}^2 + \int_0^t \mathrm{e}^{-2\beta(t-s)}\|\sigma\partial_t\nabla p + \varepsilon\partial_t^2\nabla p\|_{L^2(\Omega_R)}^2.$$

Finalement, il existe $c > 0$ telle que

$$\left\|(\partial_t w, \partial_t h)(.,t)\right\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leqslant c\mathrm{e}^{-\beta t}E(u)(0) + \|\partial_t\nabla p\|^2 + \int_0^t \mathrm{e}^{-2\beta(t-s)}\|\sigma\partial_t\nabla p + \varepsilon\partial_t^2\nabla p\|_{L^2(\Omega_R)}^2.$$

En ce qui concerne la partie divergence du champ électrique, on a facilement les estimations d'énergie suivantes :

Pour tout (e_0, h_0) vérifie les hypothèses du Théorème 1 on a :

$$\|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|2\sigma e\|_{L^2(\Omega)},$$
$$\|\partial_t^2\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|2\sigma\partial_t e\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, on remarque que $(\partial_t e, \partial_t h)$ est solution de 1 avec données initiales $(\mathbf{rot}\, h_0 - 2\sigma(x)e_0, -\mathbf{rot}\, e_0)$ et pour obtenir la première inégalité il suffit de multiplier l'équation $\partial_t W - \partial_t\nabla p - \mathbf{rot}\, h + 2\sigma(x)e = 0$ par $\partial_t\nabla p$ et d'intégrer par parties sur Ω, pour la deuxième, on multiplie l'équation $\partial_t^2 W - \partial_t^2\nabla p - \mathbf{rot}\,\partial_t h + 2\sigma(x)\partial_t e = 0$ par $\partial_t^2\nabla p$ et on multiplie l'équation $\partial_t^3 W - \partial_t^3\nabla p - \mathbf{rot}\,\partial_t^2 h + 2\sigma(x)\partial_t^2 e = 0$ par $\partial_t^3\nabla p$, on obtient :

$$\left\|\partial_t^3\nabla p\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \left\|2\sigma\partial_t^2 e\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 20. *On a* :

(1) $\lim_{t\to+\infty}\|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)} = 0$,
(2) $\lim_{t\to+\infty}\|\partial_t^2\nabla p\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Démonstration. (1)

$$\begin{aligned}(t-T)\|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_T^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-T)\|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s + \int_T^t (s-T)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_T^t \|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s + 2(t-T)\int_T^t \|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2\|\partial_t^2\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En choisissant $0 < T < 1 + T < t$ et en multipliant l'inégalité par $\frac{1}{t-T}$, on obtient :

$$\|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant 2\int_T^t \|\partial_t\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s + \int_T^t \left\|\partial_t^2\nabla p\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s.$$

De plus, pour toute donnée de Cauchy (e_0, h_0) du problème (1) et grâce aux estimations d'énergie, on obtient que

$$\int_T^t \|\partial_t\nabla p\|^2 \leqslant \int_T^t \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}^0\right) \leqslant \left|\mathcal{E}^0(t) - \mathcal{E}^0(T)\right|,$$

$$\int_T^t \left\|\partial_t^2 \nabla p\right\|^2 \leqslant \int_T^t \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}^1\right) \leqslant \left|\mathcal{E}^1(t)-\mathcal{E}^1(T)\right|.$$

Les fonctionnelles $\mathcal{E}^0$ et $\mathcal{E}^1$ étant continues, décroissantes, positives, elles admettent donc une limite :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists T_1 > 0\ \forall s,t > T_1 \quad \left|\mathcal{E}^0(t)-\mathcal{E}^0(T)\right| + \left|\mathcal{E}^1(t)-\mathcal{E}^1(T)\right| \leqslant \epsilon,$$

et on conclut que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\partial_t \nabla p\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Pour (2) on peut montrer que

$$\left\|\partial_t^2 \nabla p\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2\int_T^t \left\|\partial_t^2 \nabla p\right\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}s + \int_T^t \left\|\partial_t^3 \nabla p\right\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}s.$$

A l'aide des estimations de l'énergie, on a :

$$\int_T^t \left\|\partial_t^3 \nabla p\right\| \leqslant \int_T^t \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}^2\right) \leqslant \left|\mathcal{E}^2(t)-\mathcal{E}^2(T)\right|,$$

on utilise les estimations de $\|\partial_t^2 \nabla p\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\partial_t^3 \nabla p\|_{L^2(\Omega)}$ on a (2).

D'après ce qui précède, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|\partial_t \nabla p\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{c}{(t+1)\ln(t+1)}.$$

Reste maintenant à estimer la norme L^2 du terme :

$$\int_0^t U_\sigma(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma\partial_t \nabla p(x,s) + \varepsilon\partial_t^2 p(x,s)\end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

On montre d'abord que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t U_\sigma(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma\partial_t \nabla p(x,s) + \varepsilon\partial_t^2 p(x,s)\end{pmatrix} \mathrm{d}s = 0,$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \left\| \int_0^t U_\sigma(t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma\partial_t \nabla p(x,s) + \varepsilon\partial_t^2 p(x,s)\end{pmatrix} \mathrm{d}s \right\| \mathrm{d}t < +\infty.$$

En effet, d'après le Lemme 20 pour tout $\epsilon > 0$ il existe $A > 0$ tel que $\forall s > A$ on a $\|\sigma\partial_t \nabla p + \varepsilon\partial_t^2 \nabla p\|_{L^2(\Omega_R)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Donc, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{e}^{-2\beta(t-s)} \left\|\sigma\partial_t \nabla p + \varepsilon\partial_t^2 \nabla p\right\|^2_{L^2(\Omega_R)} \mathrm{d}s &\leqslant c\int_0^A \mathrm{e}^{-2\beta(t-s)}\,\mathrm{d}s + \frac{\epsilon}{2}\int_A^t \mathrm{e}^{-2\beta(t-s)}\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant c\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\beta A}-1}{2\beta}\right) + \frac{\epsilon}{2\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-2\beta(t-A)}\right).\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 1. $\square$

Remerciements

Je remercie le Professeur Kaïs Ammari, qui ma proposé ce problème et pour les discussions que j'ai eues avec lui. Je remercie également le Professeur Nicolas Burq pour ses remarques fructueuses. Je tiens aussi à remercier le Professeur Georgi Vodev.

Références

[1] L. Aloui, Stabilisation Neumann pour l'équation des ondes dans un domaine extérieur, J. Math. Pures Appl. 81 (2002) 1113–1134.
[2] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilisation of waves from the boundary, SIAM J. Control Optim. 305 (1992) 1024–1065.
[3] H. Barucq, B. Hanouzet, Etude asymptotique du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver–Müller II, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 316 (1993) 1019–1024.
[4] N. Burq, Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absences de résonance au voisinage du réel, Acta Math. 180 (1998) 16–29.
[5] N. Burq, Semi-classical estimates the resolvent in non trapping geometries, Int. Math. Res. Not. 5 (2002) 221–241.
[6] N. Burq, G. Lebeau, Mesures de défaut de compacité, Application au système de Lamé, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 34 (2001) 817–870.
[7] R. Dautray, J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tome 2, Masson, 1985.
[8] P. Gérard, Microlocal defect measures, Comm. Partial Differential Equations 16 (1991) 1761–1794.
[9] B.V. Kapitanov, On exponential decay as of solutions of an exterior boundary value problem for the Maxwell system, Math. USSR Sbornik 66 (1990) 475–497.
[10] M. Khenissi, Equation des ondes amorties dans un domaine extérieur, Bull. Soc. Math. France 131 (2003) 211–228.
[11] V. Komornik, Boundary stabilisation, observation and control of Maxwell's equations, Panamer. Math. J. 4 (1994) 47–61.
[12] P.D. Lax, R.S. Phillips, Scattering Theory, Academic Press, New York, 1967.
[13] G. Lebeau, Equation des ondes amorties, in : Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996, pp. 73–109.
[14] C.S. Morawetz, Decay of solutions of the exterior problem for the wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975) 229–264.
[15] A. Moulahi, Stabilisation d'ondes électromagnétiques dans un domaine extérieur 2D, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 342 (2006) 853–858.
[16] A. Moulahi, Stabilisation d'ondes électromagnétiques dans un domaine extérieur 2D, Asymptot. Anal. 52 (2006) 117–141.
[17] K.D. Phung, Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 5 (2000) 87–137.
[18] G. Vodev, Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of Laplacian, Comm. Math. Phys. 146 (1992) 205–216.
[19] G. Vodev, On the uniform decay of the energy, Serdica Math. J. 25 (1999) 191–206.
[20] C.H. Wilcox, An expansion theorem for electromagnetic fields, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956) 115–134.